Title	Kummerの多様体の定義方程式について
Author(s)	佐々木, 隆二
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (1979), 1979: 43-57
Issue Date	1979-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/212581
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.43-57

Kummer多様体の定義方程式について

日大理工　　佐々木隆二

§0 主たる結果

kを標数が2と異なる代数閉体とする。Kをk上のAbel多様体XのKummer多様体、即ち、inverse morphism $\iota: X \longrightarrow X$による、$X$の商多様体とし、$M$を$K$上のample invertible sheafとする。一次系$\Gamma(K, M^a)$（aは正整数）によって定義される写像

$$\Phi_{M^a} : K \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(K, M^a))$$

に対し、次が云える。

定理A　$a \geqslant 2$ならば、像$\Phi_{M^a}(K)$はprojectively normalである。もし自然な写像$\Gamma(K,M)\otimes\Gamma(K,M) \longrightarrow \Gamma(K,M^2)$が全射ならば、$\Phi_M(K)$もそうである。

さて、$S^n\Gamma(K,M^a)$を$\Gamma(K,M^a)$のn次対称積とし、$I_n^{(a)} = \mathrm{Ker}[\,S^n\Gamma(K,M^a) \longrightarrow \Gamma(K,M^{an})$ とおく。このとき、$I_n^{(a)}$の各元Fは$\mathbb{P}(\Gamma(K,M^a))$の$n$次超曲面$V(F)$を定める。

定理B 以上の記号の下で、

$$\Phi_{M^2}(K) = \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} V(F),$$

$$\Phi_{M^a}(K) = \bigcap_{F \in I_2^{(a)}} V(F) \qquad (a \geqq 3).$$

§1 Abel 多様体の定義方程式

X を代数閉体 k 上定義された Abel 多様体、L を X 上の ample invertible sheaf とする。定義方程式について、最近の画期的な結果は、次に述べる Mumford の定理であるが、その為に定義をしよう。

定義 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ が ideal 論的に、超曲面 $H_1, \cdots, H_m$ の交わりであるとは、次を満す事である。

i) $X = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ （集合論的）

ii) X の各点 x に対し、x の affine 近傍 $U \subset \mathbb{P}^n$ で、$X \cap U \subset U$ の ideal が $H_1, \cdots, H_m$ の affine equations $f_1, \cdots, f_m$ によって生成されるものがある。

定理（Mumford [5]）　$a \geq 4$ のとき、一次系 $\Gamma(X, L^a)$ によって定義される写像 $\Phi_{L^a} : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, L^a))$ による像 $\Phi_{L^a}(X)$ は ideal 論的に 2 次曲面の交わりである。

この Mumford の結果を巧に使い、関口は次を証明した（[8], [9]）。

定理（関口）　$\Phi_{L^3}(X)$ は ideal 論的に、3 次曲面の交わりである。

次に問題になるのは、$I_n^{(a)} = \mathrm{Ker}(S^n\Gamma(X, L^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^{an}))$ の生成えを系統的に、書きあげる事である。それらについては、Riemann 以来、多くの人達の結果があるが、ここでは最近の結果 Mumford [4], [5], Koizumi [3] をあげておくだけにする。

§2　定理 A の証明

X を代数閉体 k（$\mathrm{ch}\, k \neq 2$）上の Abel 多様体、$\iota : X \longrightarrow X$ を inverse morphism とし、M を X の Kummer 多様体 K_X 上の ample invertible sheaf とする。$L = \pi^* M$ とおく、ただし $\pi : X \longrightarrow K_X$ は自然な写像。ι

は自然に $\Gamma(X, L^a)$ (a:正整数) の自己同型 $[-1]$ を誘導する。引き戻し $\pi^* : \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^a)$ の像 $\Gamma(X, L^a)_+$ は $\{f \in \Gamma(X, L^a) \mid [-1]f = f\}$ になる。

さて、定理Aは、次の定理A'の直接の結果である。

定理A' 以上の記号の下で、$a \geqq 2$ に対し、自然な写像

$$\Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) \longrightarrow \Gamma(K_X, M^{a+1})$$

は全射である。

証明、次の可換図を考える。

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(K_X, M) \otimes \Gamma(K_X, M^a) & \longrightarrow & \Gamma(K_X, M^{a+1}) \\
\pi^* \otimes \pi^* \ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \ \pi^* \\
\Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a)_+ & \longrightarrow & \Gamma(X, L^{a+1})_+ \\
\cap & & \cap \\
\Gamma(X, L) \otimes \Gamma(X, L^a) & \longrightarrow & \Gamma(X, L^{a+1})
\end{array}$$

図中、中段の矢印が全射なることを云うのであるが、それには、次の(*)が云えれば良い。

(*) $\varphi_a : \Gamma(X, L)_+ \otimes \Gamma(X, L^a) \longrightarrow \Gamma(X, L^{a+1})$ は全射 ($a \geqq 2$)。

実際、(*)を仮定すれば、任意の $f \in \Gamma(X, L^{a+1})_+$ は $\varphi_a(\sum_i g_i \otimes h_i) = f$ ($g_i \in \Gamma(X, L)_+$, $h_i \in \Gamma(X, L^a)$) なる形

に表わされる。$f \in \Gamma(X, L^{a+1})_+$ 故 $\varphi_a(\sum g_i \otimes [-1]h_i) = f$.
従って $f = \varphi_a(\sum g_i \otimes \frac{h_i + [-1]h_i}{2})$。

さて (*) を示す為に、次の Lemma を証明する。

Lemma $f: X \longrightarrow Y$ を Abel 多様体の isogeny. M を Y 上の ample invertible sheaf とし、$L = f^*M$ とおく。すると自然な写像

$$\tau : \Gamma(X, L^2)^{\mathrm{Ker} f} \otimes \Gamma(X, L^n) \longrightarrow \Gamma(X, L^{n+2})$$

は、$n \geq 3$ のとき全射である，但し $f^*(\Gamma(Y, M^2)) = \Gamma(X, L^2)^{\mathrm{Ker} f}$ とおく。

Lemma の証明、L^{n+2} の Theta 群を $\mathcal{G}(L^{n+2})$ とする（Theta 群の定義等については、[6], [7] を参照されたい）。τ の像を W とすれば、次の事が云えれば良い（cf [9]）。

$$(\#) \begin{cases} \text{剰余体が } k \text{ なる、任意の } k\text{-局所環 } (R, \mathfrak{m}) \\ \text{と、} \mathcal{G}(L^{n+2}) \text{ の任意 } R\text{-valued point } \lambda \text{ とに対し、} \\ \qquad U_\lambda[f^*(\Gamma(Y, M^{n+2})) \otimes R] \subset W \otimes R\text{。} \end{cases}$$

ここで、U は $\mathcal{G}(L^{n+2})$ の $\Gamma(X, L^{n+2})$ への自然な作用である。
$K(L^{n+2}) = \mathrm{Ker}\, \phi_{L^{n+2}}$ とおく、但し $\phi_{L^{n+2}} : X \longrightarrow \hat{X}$ は $x \longmapsto T_x^* L^{n+2} \otimes L^{-(n+2)}$ で定義される、X からその dual $\hat{X}$ への homomorphism。$j : \mathcal{G}(L^{n+2}) \longrightarrow K(L^{n+2})$ は自

然な準同型とし、$j(\lambda)=u$ とおく。このとき次の可換図を得る。

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(X_S,(L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X,L^{n+2})\otimes R \arrow[r, "T_u^*"] & \Gamma(X_S, T_u^*(L_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(X_S,(L_S)^{n+2}) \\
\Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y,M^{n+2})\otimes R \arrow[r, "T_{f(u)}^*"'] \arrow[u, "f^*"] & \Gamma(Y_S, T_{f(u)}^*(M_S)^{n+2}) \simeq \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
$$

ここで P_Y は $Y\times\hat{Y}$ 上の Poincaré invertible sheaf. $\gamma=\phi_{M^{n+2}}(f(u))$ $P_{Y,\gamma}$ は P_Y の $Y\times \mathrm{Spec}\,R \xrightarrow{1_Y\times\gamma} Y\times\hat{Y}$ による制限、$S=\mathrm{Spec}\,R$, $X_S=X\times S$ 等々。一方、次の可換図もえる。

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma(Y_S,(M_S)^2)\otimes\Gamma(Y_S,(M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}) \arrow[d] \\
\Gamma(Y,M^2)\otimes\Gamma(Y,M^n\otimes P_{Y,\bar{\gamma}}) \arrow[r] & \Gamma(Y,M^{n+2}\otimes P_{Y,\bar{\gamma}}).
\end{tikzcd}
$$

ここで縦の矢印は、reduction modulo $\mathfrak{m}$ で、$\bar{\gamma}$ は合成写像 $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m})\hookrightarrow \mathrm{Spec}\,R \xrightarrow{\gamma} Y$。下段の矢印は全射(cf [7])故、中山の補題から上段の矢印も全射なることがわかる。また $f^*((M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma})\simeq(L_S)^n$ 故、次図も可換である。

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{tikzcd}
{[\Gamma(X,L^2)^{\mathrm{Ker}\,f}\otimes R]\otimes[\Gamma(X,L^n)\otimes R]} \arrow[r] & \Gamma(X,L^{n+2})\otimes R \\
\Gamma(Y_S,(M_S)^2)\otimes\Gamma(Y_S,(M_S)^n\otimes P_{Y,\gamma}) \arrow[r, two heads] \arrow[u, "f^*\otimes f^*"] & \Gamma(Y_S,(M_S)^{n+2}\otimes P_{Y,\gamma}). \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
$$

図(A),(B)の可換性より(#)が云える。これで Lemma の証明が終る。

定理の証明の続き。次の条件を満す isogeny $f: X \longrightarrow Y$ と、Y の Kummer 多様体 K_Y 上の ample invertible sheaf M' とが存在する。

条件 (i) $K((\pi')^* M') = Y_2 = \{y \in Y \mid 2y = 0\}$

(ii) $(f')^* M' \simeq M$ 。

但し、$\pi' : Y \longrightarrow K_Y$ は自然な写像で、$f' : K_X \longrightarrow K_Y$ は次の図を可換にするもの：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ K_X & \xrightarrow[f']{} & K_Y \end{array} \quad 。$$

従って、次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, L) & \xleftarrow{f^*} & \Gamma(Y, (\pi')^* M') \\ \cup & & \| \ \ \text{(i)より} \\ \Gamma(X, L)_+ & & \Gamma(Y, (\pi')^* M')_+ \\ {\scriptstyle \pi^*}\uparrow\wr & & \uparrow\wr \ {\scriptstyle (\pi')^*} \\ \Gamma(K_X, M) & \xleftarrow[(f')^*]{} & \Gamma(K_Y, M') \end{array} \quad 。$$

この図式より、$\Gamma(X, L)_+ \supset f^*(\Gamma(Y, (\pi')^* M'))$ を得る。さらに、$K((\pi')^* M') = Y_2$ に注意すれば、$(\pi')^* M' \simeq (L')^2$ なる形となる、L' は Y 上の ample invertible sheaf である。従って Lemma より (*) をえる。これで定理 A′ の証明が終る。

§3 定理 B の証明。

定理の後半も前半と同様に示される故、前半のみ証明する。§0 の記号を使用する。$K(\pi^*M) \supset X_2 = \{x \in X \mid 2x = 0\}$ 故、$\pi^*M \simeq L^2$ なる形に表わされる、ただし $\pi : X \to K_X = K$ は自然な写像、L は X 上の ample symmetric（即ち $\iota^*L \simeq L$）invertible sheaf。このとき isomorphism $\varphi : L \longrightarrow \iota^*L$ で $\varphi^{\otimes 2} : L^2 \longrightarrow \iota^*L^2$ が自然な isomorphism になるものがある。$\varphi^{\otimes b}$（b：正整数）：$L^b \longrightarrow \iota^*L^b \simeq L^b$ が誘導する $\Gamma(X, L^b)$ の automorphism を $[-1]$ と書く。$\Gamma(X, L^b)_+ = \{f \in \Gamma(X, L^b) \mid [-1]f = f\}$ とおくと、自然な単射 $\pi^* : \Gamma(K, M^b) \longrightarrow \Gamma(X, L^{2b})$ により、$\Gamma(K, M^b)$ と $\Gamma(X, L^{2b})_+$ とが同一視される。$\mathbb{P}(\Gamma(K, M^2)) = \mathbb{P}(\Gamma(X, L^4)_+)$ の各点は、$\Gamma(X, L^4)_+$ 上の non-trivial linear form l で表わされる。さてその様な l が与えられ、この l に対応する $\mathbb{P}(\Gamma(X, L^4)_+)$ の点 $[l]$ が、

$$[l] \in \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} V(F)$$

を満すとする。このことは次と同値：

$$\exists\ \ell^{(3)} : \Gamma(X, L^{12})_+ \longrightarrow k \quad \text{linear form s.t.}$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 3} \arrow[rr] \arrow[dr, "\ell^{\otimes 3}"'] & \circlearrowleft & \Gamma(X, L^{12})_+ \arrow[dl, "\ell^{(3)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Lemma $\exists$ linear form $n : \Gamma(X, L^6)_+ \longrightarrow k$ s.t.

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^6)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "n^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^{12})_+ \arrow[dl, "\ell^{(3)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Lemma の証明。$[\ell] \in \bigcap_{F \in I_3^{(2)}} \nabla(F)$ 故 $[\ell] \in \bigcap_{F \in I_2^{(2)}} \nabla(F)$。
従って linear form $\ell^{(2)} : \Gamma(X, L^8)_+ \longrightarrow k$ で、図

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^4)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "\ell^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^{8})_+ \arrow[dl, "\ell^{(2)}"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

が可換となるものがある。従って linear form $m : \Gamma(X, L^2)_+ \longrightarrow k$ で、次図を可換にするものがある。

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, L^2)_+^{\otimes 2} \arrow[rr] \arrow[dr, "m^{\otimes 2}"'] & & \Gamma(X, L^{4})_+ \arrow[dl, "\ell"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

すると、任意の $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \Gamma(X, L^2)_+$ と $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \Gamma(X, L^4)_+$ とに対し、

$$\ell^{(3)}((a_1 \cdot a_2) \cdot (b_1 \cdot b_2)) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot c_2) \cdot (d_1 \cdot d_2))$$

$$= \ell^{(3)}((a_1 \cdot b_1) \cdot a_2 \cdot b_2) \cdot \ell^{(3)}((c_1 \cdot d_1) \cdot c_2 \cdot d_2)$$

$$= \ell(a_1\cdot b_1)\cdot\ell(a_2)\cdot\ell(b_2)\cdot\ell(c_1\cdot d_1)\cdot\ell(c_2)\cdot\ell(d_2)$$

$$= m(a_1)\cdot m(b_1)\cdot\ell(a_2)\cdot\ell(b_2)\cdot m(c_1)\,m(d_1)\cdot\ell(c_2)\cdot\ell(d_2)$$

$$= \ell^{(3)}((a_1\cdot a_2)\cdot(c_1\cdot c_2))\cdot\ell^{(3)}((b_1\cdot b_2)\cdot(d_1\cdot d_2))$$

となる。一方定理 A′ により、$\Gamma(X,L^2)_+\otimes\Gamma(X,L^4)_+\longrightarrow\Gamma(X,L^6)_+$ は全射となる故、上式は、任意の a, b, c, $d\in\Gamma(X,L^6)_+$ に対し、

$$\ell^{(3)}(a\cdot b)\cdot\ell^{(3)}(c\cdot d) = \ell^{(3)}(a\cdot c)\cdot\ell^{(3)}(b\cdot d)$$

と云い変えられる。この事から linear form n の存在がわかる。

さて定理の証明を続けよう。$\Gamma(X,L^3)_- = \{f\in\Gamma(X,L^3)\mid[-1]f=-f\}$ とおくと、

$$\Gamma(X,L^3) = \Gamma(X,L^3)_+\oplus\Gamma(X,L^3)_-$$

となる。上記 Lemma の証明と同様にして、linear forms $p:\Gamma(X,L^3)_+\longrightarrow k$ と $q:\Gamma(X,L^3)_-\longrightarrow k$ で次図を可換にするものがあることを知る:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,L^3)_+^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[dr, "p^{\otimes 2}"'] & \Gamma(X,L^6)_+ \arrow[d, "n"] & \Gamma(X,L^3)_-^{\otimes 2} \arrow[l] \arrow[dl, "q^{\otimes 2}"] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

さらに、$\Gamma(X,L^3)_+^{\otimes 2}+\Gamma(X,L^3)_-^{\otimes 2}\longrightarrow\Gamma(X,L^6)_+$ が全射で n は non-trivial 故、$p\oplus q:\Gamma(X,L^3)\longrightarrow k$ も nontrivialとなることがわかる。この $p\oplus g$ は次を満す：

(c) 任意の $F \in \mathrm{Ker}\left(\Gamma(X, L^3)^{\otimes 3} \longrightarrow \Gamma(X, L^9)\right)$ に対し

$$(p\oplus g)^{\otimes 3}(F) = 0.$$

従って、関口の定理（§1）により、X の点 x で $\Phi_{L^3}(x) \in \mathbb{P}(\Gamma(X, L^3))$ に対応する linear form が $p\oplus g$ となるものがある。このとき、

$$\Phi_{M^2}(\pi(x)) \in \mathbb{P}(\Gamma(K, M^2)) = \mathbb{P}(\Gamma(X, L^4)_+)$$

に対応する linear form が与えられた l になることが解り、定理の証明を終る。

§4 例。

この節では、基礎体を $\mathbb{C}$ とする。g 次の Siegel上半空間 H_g の点 z と、列 vector $x \in \mathbb{C}^g$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^g$ とに対し、いわゆる theta series は

$$\theta\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}(z|x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \mathbf{e}\left(\tfrac{1}{2}\,{}^t(k_1+m)z(k_1+m) + (k_1+m)(x+k_2)\right)$$

によって定義される。但し $\mathbf{e}(*) = e^{2\pi i *}$。$X = \mathbb{C}^g/(z, 1_g)\mathbb{Z}^{2g}$, $\Theta_a = \bigoplus_{p \in \frac{1}{a}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g} \theta\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}(az|ax)\cdot\mathbb{C}$, $\Theta_a^+ = \{\theta \in \Theta_a \mid \theta : \text{even}\}$

とする。さて linear system Θ_4^+ によって定義される写像を考える：

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\Theta_4^+} : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}(\Theta_4^+) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & x & \longmapsto & (\cdots : \theta[{p \atop q}](z|2x) : \cdots)_{({p \atop q})\text{は even}} \end{array}$$

ここで、$({p \atop q}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ で ${}^t p \cdot q \equiv 0 \mod 2$ (i.e. $({p \atop q})$: even) の全体を考えると

$$\Theta_4^+ = \bigoplus_{({p \atop q}):\text{even}} \theta[{p \atop q}](z|2x) \cdot \mathbb{C}$$

となることに注意する。このとき $g=2$ ならば $\Phi_{\Theta_4^+}(X)$ の定義 ideal は、2次の斉次部分 I_2 で生成されることがわかり、I_2 の生成元も explicit に書きあげることができる (Göpel, Wirtinger)。

また

$$\Theta_2 \otimes \Theta_2 \longrightarrow \Theta_4^+$$

が全射になる為の必要十分条件は

$$\theta[{p \atop q}](z|0) \neq 0 \qquad (\forall ({p \atop q}) : \text{even})$$

で与えられ (Mumford)、このことは、$g=2$ のときは X が楕円曲線の積とはならないことであり、$g=3$ のときは、X が non-hyperelliptic curve の Jacobian 多様体となることである。最後に $g=2$ のとき

$$\Phi_{\Theta_2} : X = \mathbb{C}^2/(z, 1_2)\mathbb{Z}^4 \longrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\Theta_2)$$

による像 $\Phi_{\Theta_2}(X)$ の定義方程式を述べる (cf Baker[1]).

$p = \binom{0}{\frac{1}{2}}$, $q = \binom{\frac{1}{2}}{0}$, $p+q = \binom{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ とすると

$$\Theta_2 = \left\langle \theta[^0_0](\tfrac{1}{2}z|x),\ \theta[^0_p](\tfrac{1}{2}z|x),\ \theta[^0_q](\tfrac{1}{2}z|x),\ \theta[^0_{p+q}](\tfrac{1}{2}z|x) \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

これら basis に対応して $\mathbb{P}^3$ の座標を X_0, X_p, X_q, X_{p+q} とおくと、X が楕円曲線の積にならないとき方程式は、次の様になる。

$$X_0^4 + X_p^4 + X_q^4 + X_{p+q}^4 + A X_0 X_p X_q X_{p+q}$$
$$+ B(X_0^2 X_p^2 + X_q^2 X_{p+q}^2) + C(X_0^2 X_q^2 + X_p^2 X_{p+q}^2) + D(X_0^2 X_{p+q}^2 + X_p^2 X_q^2) = 0$$

但し
$$A = \frac{1}{\theta_0 \cdot \theta_p \cdot \theta_q \cdot \theta_{p+q}} \Big\{ -(\theta_0^4 + \theta_p^4 + \theta_q^4 + \theta_{p+q}^4)$$
$$+ \frac{\theta_0^2\theta_p^2 + \theta_q^2\theta_{p+q}^2}{\theta_0^2\theta_p^2 - \theta_q^2\theta_{p+q}^2}(\theta_0^4 + \theta_p^4 - \theta_q^4 - \theta_{p+q}^4)$$
$$+ \frac{\theta_0^2\theta_q^2 + \theta_p^2\theta_{p+q}^2}{\theta_0^2\theta_q^2 - \theta_p^2\theta_{p+q}^2}(\theta_0^4 - \theta_p^4 + \theta_q^4 - \theta_{p+q}^4)$$
$$+ \frac{\theta_0^2\theta_{p+q}^2 + \theta_p^2\theta_q^2}{\theta_0^2\theta_{p+q}^2 - \theta_p^2\theta_q^2}(\theta_0^4 - \theta_p^4 - \theta_q^4 + \theta_{p+q}^4) \Big\},$$

$$-B = \frac{\theta_0^4 + \theta_p^4 - \theta_q^4 - \theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_p^2 - \theta_q^2\theta_{p+q}^2}, \quad -C = \frac{\theta_0^4 - \theta_p^4 + \theta_q^4 - \theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_q^2 - \theta_p^2\theta_{p+q}^2}$$

$$-D = \frac{\theta_0^4 - \theta_p^4 - \theta_q^4 + \theta_{p+q}^4}{\theta_0^2\theta_{p+q}^2 - \theta_p^2\theta_q^2}, \quad \theta_r = \theta[^0_r](\tfrac{1}{2}z|0).$$

この方程式は、$z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in H_2$ となるときは、

$$(X_0 X_{p+q} - X_p X_q)^2 = 0$$

となることが容易に解る。 $X = \mathbb{C}^2/\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, 1_2\right)\mathbb{Z}^4 = E_1 \times E_2$ $\left(E_i = \mathbb{C}/(z_i, 1)\mathbb{Z}^2\right)$ を Φ_{Θ_2} によって $\mathbb{P}^3$ に埋めこむとその像 $\Phi_{\Theta_2}(E_1 \times E_2)$ は $X_0 X_{p+q} - X_p X_q = 0$ によって定義された2次曲面となり、$E_1 \times E_2$ の Kummer 多様体ではない。

参考文献

[1] H. F. Baker, Abelian Functions, Cambridge, 1897.

[2] S. Koizumi, Theta relations and projective normality of abelian varieties, Amer. J. Math., 98(3), 865−889 (1976).

[3] ———, The equations defining abelian varieties and modular functions, Math. Ann. [redacted] 242 (2), 127-145 (1979).

[4] D. Mumford, On the equations defining abelian varieties I, Invent. Math., 1, 287−354 (1966).

[5] ———, Varieties defined by quadratic equations, Questioni sulle varieta algebriche, Corsi dal C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

[6] ———, Abelian varieties, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, London and New York, 1970.

[7] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties II, J. Math. Soc. Japan 29(4), 709-727 (1977).

[8] ————, On the cubics defining abelian varieties, Ibid., 30(4), 703-721 (1978).

[9] ————, On the normal generation by a line bundle on an abelian variety, Proc. Japan Acad., 54, Ser. A, 185-188 (1978).

[10] W. Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig 1895.